التمرين الأول

نعتبر التكامل $I_n=\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$ 1) بين وجود التكامل I_n

2) بين أن $I_n\ge 0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ و أحسب $I_{n+1}+I_n$ ثم حدد I_0 ; I_1 , I_2

3) أدرس رتابة $(I_n)_n$ و بين أن $0\le I_n\le \frac{1}{2n+1}$ وحدد $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

التمرين الثاني

لكل n من $\mathbb{N}$ و $n\ge 2$ نضع $I_n=n\int_1^{\pi}\frac{\sin x}{x^n}\,dx$

1) باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أن $I_n=\frac{n}{n-1}\left[\sin(1)+\int_1^{\pi}\frac{\cos x}{x^{n-1}}\,dx\right]$

2) أ- بين أن : $\left|\int_1^{\pi}\frac{\cos x}{x^{n-1}}\,dx\right|\le\int_1^{\pi}\frac{dx}{x^{n-1}}$

ب- بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^{\pi}\frac{dx}{x^{n-1}}=0$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

التمرين الثالث

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2t)^n e^{-t}\,dt$

1) أ- بين أن $\frac{1}{\sqrt{e}}(1-2t)^n\le(1-2t)^n e^{-t}\le(1-2t)^n$: $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ \forall t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$

ب- استنتج أن $\frac{1}{2\sqrt{e}(1+n)}\le I_n\le\frac{1}{2(n+1)}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء : أ- أحسب I_1

ب- بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $I_{n+1}=1-2(n+1)I_n$

3) استنتج حساب I_2 ; I_3

التمرين الرابع

1) نعتبر التكاملين $I(x)=\int_0^x\frac{t^2}{1+t}\,dt$ و $J(x)=\int_0^x\frac{-t^3}{1+t}\,dt$ حيث x عدد حقيقي من $\mathbb{R}^+$

أ- أحسب $I(x)$; $J(x)$

ب- استنتج أن $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$: $(\forall x\in\mathbb{R}^+)$

2) لتكن الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي : $\begin{cases} g(x)=\frac{x\ln x}{x-1}\ ;\ x\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\} \\ g(1)=1\end{cases}$

بين أن قابلة للاشتقاق على يمين النقطة 1